



دبیرستان هاشمی نژاد ۱

## مجموعه تست مثلثات ۱



مدرس: مسعود یکتا

۱ اگر  $\sin \alpha \cos \alpha > 0$  و  $\sin \alpha \tan \alpha < 0$  باشد انتهای  $\alpha$  در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

- اول ۱ دوم ۲ سوم ۳ چهارم ۴

۲ اگر  $\frac{-\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$  و  $\sin 3x = m - 1$  باشد مقادیر  $m$  در کدام فاصله قرار دارد؟

- ۱  $(0, 2)$  ۲  $(0, 1]$  ۳  $(-1, \frac{1}{2})$  ۴  $(-1, 0)$

۳ اگر  $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$  باشد  $\sin x \cos x$  کدام است؟

- ۱  $\frac{3}{4}$  ۲  $-\frac{3}{4}$  ۳  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ۴  $\frac{2}{\sqrt{2}}$

۴ حاصل عبارت  $\frac{2 \sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}$  کدام است؟

- ۱  $2 \tan \alpha$  ۲  $\cot \alpha$  ۳  $2 \cot \alpha$  ۴  $\tan \alpha$

۵ نقطه‌ی  $A$  بر روی دایره‌ای به شعاع ۳ واحد قرار دارد متحرکی از نقطه‌ی  $A$  در خلاف جهت مثلثاتی  $42^\circ$  درجه چرخیده و در نقطه‌ی  $M$  قرار گرفته است متحرک دیگر از نقطه‌ی  $A$  در جهت مثلثاتی  $21^\circ$  درجه چرخیده و در نقطه‌ی  $N$  قرار گرفته است. طول قوس  $MN$  چند واحد است؟

- ۱  $4,08$  ۲  $4,29$  ۳  $4,71$  ۴  $3,96$

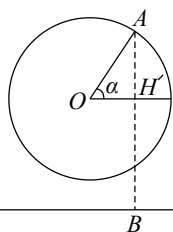
۶ نقطه‌ی  $A(3, 2)$  بر روی دایره‌ای به مرکز  $(0, 0)$  قرار دارد متحرکی از نقطه‌ی  $A$  در جهت چرخش عقربه‌ی ساعت کمان  $12^\circ$  درجه تا نقطه‌ی  $M$  طی کرده است. مختصات  $M$  کدام است؟

- ۱  $(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$  ۲  $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$  ۳  $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$  ۴  $(-\frac{3}{2}, 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2})$

۷ اگر  $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{2-m}{m+1}$  و  $|x| < \frac{\pi}{4}$  باشد حدود تغییرات  $m$  چگونه است؟

- ۱  $m < -1$  ۲  $m > 2$  ۳  $-1 < m < 2$  ۴  $m < -1$  یا  $m > 2$

۸ در شکل زیر، شخص  $A$  بر چرخ و فلکی سوار است که قطر آن  $50$  متر و فاصله‌ی بالاترین نقطه‌ی چرخ و فلک تا زمین  $60$  متر است، فاصله‌ی این شخص در هر لحظه تا زمین وقتی چرخ و فلک حرکت می‌کند (طول  $AB$ )، بر حسب  $\alpha$  از کدام معادله به دست می‌آید؟



- ۱  $25 \sin \alpha + 10$  ۲  $25 \cos \alpha + 35$  ۳  $25 \sin \alpha + 35$  ۴  $25 \cos \alpha + 10$

۹ اگر  $25^\circ < x < 30^\circ$  و  $\cos 2x = \frac{2m-1}{2}$ ، آنگاه حدود تغییرات  $m$  کدام فاصله است؟

- ۱  $(1, \frac{3}{2}]$  ۲  $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$  ۳  $(1, \frac{3}{2})$  ۴  $(\frac{1}{2}, \cos 50^\circ)$

۱۰ اگر  $\cos \alpha = 2m + 1$ ،  $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3}$  باشد، حدود  $m$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{1}{4} < m \leq 0$  ۲  $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}$  ۳ فقط  $m = -\frac{1}{4}$  ۴  $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}$



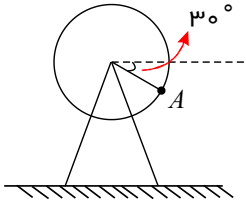
۱۱) در یک دایره، توسط اضلاع زاویه مرکزی  $\theta$ ، کمانی به طول نصف شعاع دایره بریده شده است.  $\theta$  چند درجه است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$  ۲) ۱ ۳)  $\frac{90}{\pi}$  ۴)  $\frac{180}{\pi}$

۱۲) زاویه  $\theta$  کمانی به طول  $\frac{1}{4}$  سانتی متر در دایره‌ای با شعاع  $\frac{1}{4}$  سانتی متر بریده شده است. مقدار  $\theta$  بر حسب رادیان کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳) چرخ و فلکی دایره‌ای شکل به شعاع ۱۲ متر دارای تعدادی کابین است. مطابق شکل، کابین  $A$  در ارتفاع ۱۸ متری از سطح زمین قرار دارد. اگر چرخ و فلک  $21^\circ$  حول مبدأ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران کند، کابین  $A$  در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار خواهد گرفت؟ (زاویه‌ی کابین  $A$  با سطح افقی  $30^\circ$  است.)



- ۱)  $6(4 + \sqrt{3})$  ۲)  $3(7 + 2\sqrt{3})$  ۳) ۲۴ ۴) ۲۱

۱۴) اگر  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ ، آن گاه حدود تغییرات  $\sin x$  کدام است؟

- ۱)  $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$  ۲)  $[\frac{1}{2}, 1]$  ۳)  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$  ۴)  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$

۱۵) نقطه‌ی  $A(0, 1)$ ، روی دایره‌ی مثلثاتی به اندازه‌ی  $\frac{13\pi}{4}$  رادیان در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند تا به نقطه‌ی  $A'$  برسد.

مجموع طول و عرض نقطه‌ی  $A'$  کدام است؟

- ۱) صفر ۲)  $\sqrt{2}$  ۳)  $-\sqrt{2}$  ۴)  $2\sqrt{2}$

۱۶) اگر  $\tan x > 0$  و  $\sin x < 0$  باشد، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

- ۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

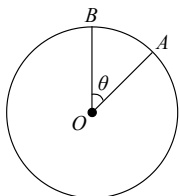
۱۷) حاصل  $\frac{1}{\tan^2 15^\circ} - \frac{1}{\cot^2 15^\circ}$  کدام است؟

- ۱)  $8\sqrt{3}$  ۲)  $-8\sqrt{3}$  ۳)  $4\sqrt{3}$  ۴)  $-4\sqrt{3}$

۱۸) اگر  $A = \sin 1$  و  $B = \sin 4$  و  $C = \sin 5$ ، کدام رابطه صحیح است؟ (زوايا بر حسب رادیان هستند)

- ۱)  $A < B < C$  ۲)  $A > B > C$  ۳)  $A > C > B$  ۴)  $B > A > C$

۱۹) مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مرکز  $O$  و به شعاع ۵، طول کمان  $AB$  برابر  $\frac{\pi}{4}$  است. اندازه‌ی زاویه‌ی  $\theta$  بر حسب درجه کدام است؟



- ۱)  $10^\circ$  ۲)  $20^\circ$  ۳)  $18^\circ$  ۴)  $36^\circ$

۲۰) اگر  $\cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x$  باشد، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

- ۱) اول ۲) دوم ۳) اول و چهارم ۴) دوم و سوم

۲۱) اگر  $\sin x > 0$  و  $\cot x < 0$  باشد، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

- ۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم



۲۲) اگر  $\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\sin x + 6 \cos x} = 1$  مقدار  $\cot 2x$  کدام است؟

۱)  $-\frac{24}{5}$

۲)  $\frac{5}{24}$

۳)  $-\frac{5}{12}$

۴)  $-\frac{12}{5}$

۲۳) با توجه به شکل های روبه رو حاصل  $x^2 + y^2$  چقدر است؟

۱)  $3x^2$

۳)  $4x^2$

۲)  $3y^2$

۴)  $5y^2$

۲۴) در شکل مقابل مقدار  $x$  چقدر است؟

۱) ۸

۳) ۲۴

۲) ۱۶

۴) ۱۲

۲۵) با توجه به شکل مقابل، حاصل  $\tan A$  چقدر است؟

۱) ۱

۳) ۳

۲) ۲

۴) ۴

۲۶) در شکل مقابل حاصل  $\cos \alpha \cdot \cot \beta$  کدام است؟

۱)  $\frac{1}{2}$

۳)  $2\sqrt{11+7\sqrt{3}}$

۲)  $\frac{2}{\sqrt{11+7\sqrt{3}}}$

۴) ۲

۲۷) در شکل مقابل زاویه  $\theta$  چند درجه است؟ ( $BC = 2\sqrt{15}$ )

۱)  $30^\circ$

۳)  $53^\circ$

۲)  $45^\circ$

۴)  $60^\circ$

۲۸) در شکل مقابل حاصل  $x^2 - x\sqrt{3}$  چقدر است؟

۱) ۹

۳) ۱۲

۲) ۱۸

۴) ۲۷

۲۹) با توجه به شکل مقابل، چه تعداد از روابط زیر درست است؟

الف)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

ب)  $\cos 2\alpha = 2 \cos \alpha - 1$

ج)  $\cos 2\alpha = \sin \alpha$

د)  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

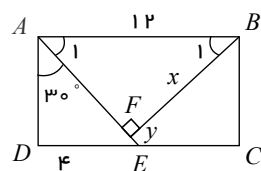
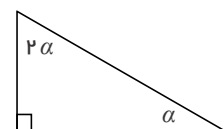
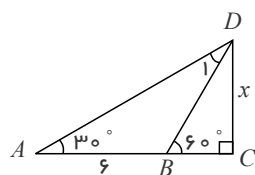
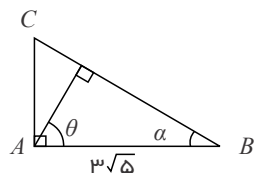
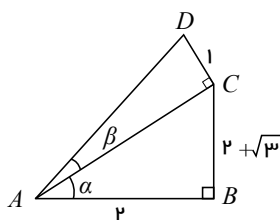
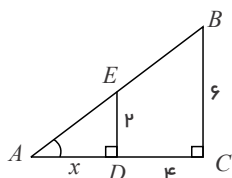
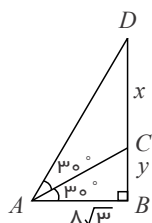
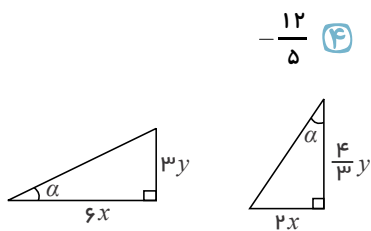
۳۰) در مستطیل ABCD حاصل  $xy$  چقدر است؟ ( $EF = y, BF = x$ )

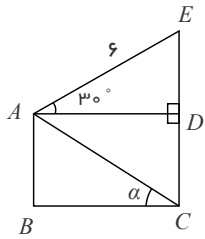
۱)  $3\sqrt{3}$

۳)  $9\sqrt{3}$

۲)  $12\sqrt{3}$

۴)  $18\sqrt{3}$



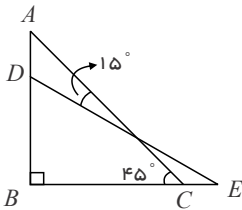


۳۱ در شکل مقابل چهارضلعی  $ABCD$  مستطیل است. اگر  $\tan \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{9}$  باشد، طول پاره خط  $EC$  کدام است؟

- ۸ (۲)  
۱۰ (۴)

- ۷ (۱)  
۹ (۳)

۳۲ در شکل مقابل، اگر  $AC = DE = 10$  باشد و مقدار تقریبی  $\sqrt{2} \simeq 1,4$  و  $\sqrt{3} \simeq 1,7$  فرض شود، طول تقریبی  $AD$  کدام است؟

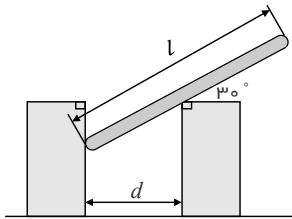


- ۴ (۲)  
۳ (۴)

- ۲ (۱)  
۵ (۳)

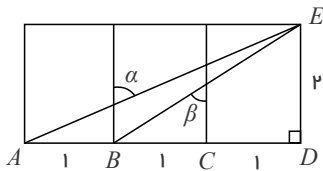
۳۳ در شکل مقابل میله ای به طول  $l = 1m$  درون یک گودال افتاده است. اگر نیمی از طول میله بیرون از گودال باشد، فاصله دو دیواره گودال از هم

چقدر است؟



- $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (۲)  
 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (۴)

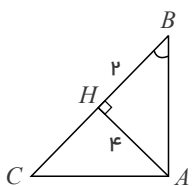
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۱)  
 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (۳)



۳۴ در شکل مقابل، حاصل  $\cot \hat{\beta} + \cot \hat{\alpha}$  کدام است؟

- $\frac{8}{3}$  (۲)  
 $\frac{6}{5}$  (۴)

- $\frac{5}{6}$  (۱)  
 $\frac{5}{3}$  (۳)



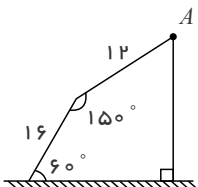
۳۵ در شکل مقابل، حاصل  $\cos \hat{C}$  چقدر است؟

- $2\sqrt{5}$  (۲)  
 $2,5 \times \sqrt{5}$  (۴)

- $\frac{\sqrt{5}}{4}$  (۱)  
 $0,4 \times \sqrt{5}$  (۳)

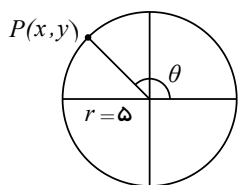
۳۶ مطابق شکل دو نردبان آتش نشانی به طول های ۱۲ و ۱۶ متر را روی هم سوار کرده تا به پنجره A برسند، ارتفاع پنجره از سطح زمین تقریباً

چقدر است؟ ( $\sqrt{3} \simeq 1,75$ )



- ۲۰,۵ (۲)  
۲۱,۵ (۴)

- ۲۰ (۱)  
۲۱ (۳)



۳۷ اگر  $\sin \theta = \frac{1}{4}$  باشد، با توجه به شکل مقابل، مقدار  $x$  کدام است؟

- $-\frac{5\sqrt{15}}{4}$  (۲)  
 $-\frac{4\sqrt{5}}{15}$  (۴)

- $-\frac{4\sqrt{15}}{5}$  (۱)  
 $-\frac{15\sqrt{5}}{4}$  (۳)



(۳۸) نقطه  $P$  به طول  $\frac{4}{5}$  روی دایره مثلثاتی قرار دارد و از دوران نقطه  $A(1, 0)$  حول مبدأ مختصات و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به دست آمده است. اگر  $2\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$  زاویه دوران باشد،  $\cot \theta$  کدام است؟

- ①  $-\frac{3}{4}$       ②  $-\frac{3}{5}$       ③  $-\frac{4}{3}$       ④  $-\frac{5}{4}$

(۳۹) اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ربع چهارم باشد، آن گاه کدام رابطه صحیح است؟

- ①  $\frac{\tan \alpha}{\cot \alpha} < 0$       ②  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$       ③  $\cos \alpha \cdot \tan \alpha > 0$       ④  $\sin \alpha \cdot \cot \alpha < 0$

(۴۰) اگر  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$  و  $\cos \alpha \cdot \cot \alpha > 0$  باشد،  $\alpha$  در کدام ناحیه قرار دارد؟

- ① اول      ② دوم      ③ سوم      ④ چهارم

(۴۱) اگر  $2\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$  و  $\cos \theta = 2m + 1$  باشد، محدوده  $m$  شامل چند عدد صحیح است؟

- ① صفر      ② ۱      ③ ۲      ④ ۳

(۴۲) اگر  $30^\circ < \alpha < 3^\circ$  و  $\sin \alpha = m + \frac{3}{2}$  باشد، محدوده  $m$  کدام است؟

- ①  $1 < m < 2$       ②  $0 < m < 1$       ③  $-1 < m < 0$       ④  $-2 < m < -1$

(۴۳) اگر  $90^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$  باشد، علامت عبارات  $A = \sin \alpha - \sin \beta$  و  $B = \cos \beta - \cos \alpha$  به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- ① مثبت و منفی      ② منفی و مثبت      ③ مثبت و مثبت      ④ منفی و منفی

(۴۴) با فرض  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، کدام یک از نامساوی‌های زیر درست است؟

- ①  $\tan \alpha > \cot \alpha$       ②  $\tan \alpha < \cot \alpha$       ③  $\sin \alpha < \cos \alpha$       ④  $\sin \alpha > \tan \alpha$

(۴۵) اگر  $x$  و  $y$  دو زاویه در ناحیه اول دایره مثلثاتی و  $x > y$  باشد، آن گاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

- ①  $\sin x > \sin y$       ②  $\cos x > \cos y$       ③  $\tan x < \tan y$       ④  $\cot x > \cot y$

(۴۶) اگر در مثلث  $\triangle ABC$  داشته باشیم  $\cos(\hat{A} - \hat{B}) + \sin(\frac{\hat{B}}{2} + \hat{C}) = 2$ ، نوع مثلث  $\triangle ABC$  کدام است؟

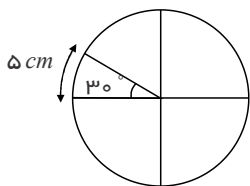
- ① قائم‌الزاویه غیر متساوی‌الساقین      ② قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین  
③ متساوی‌الاضلاع      ④ مختلف‌الاضلاع با یک زاویه بزرگ‌تر از  $90^\circ$

(۴۷) اگر  $20^\circ < \theta < 50^\circ$  باشد و  $\sin 3\theta = \frac{m-1}{2}$ ، حدود  $m$  کدام است؟

- ①  $(2, 3)$       ②  $[2, 3]$       ③  $(2, 3]$       ④  $[2, 3]$

(۴۸) مساحت دایره مقابل کدام است؟

- ①  $\frac{900}{\pi}$       ②  $\frac{800}{\pi}$       ③  $\frac{700}{\pi}$       ④  $\frac{620}{\pi}$



(۴۹) دو ناظر  $A$  و  $B$  که در سطح زمین قرار دارند و با فاصله ۲۰ متر از هم در یک طرف برجی ایستاده‌اند، نوک این برج را با زاویه‌های  $30^\circ$  و  $45^\circ$  نسبت به افق می‌بینند. ارتفاع این برج چند متر است؟ ( $A, B$  و پای برج روی یک خط قرار دارند).

- ①  $10(\sqrt{3} + 1)$       ②  $10(\sqrt{3} - 1)$       ③  $20(\sqrt{3} + 1)$       ④  $20(\sqrt{3} - 1)$



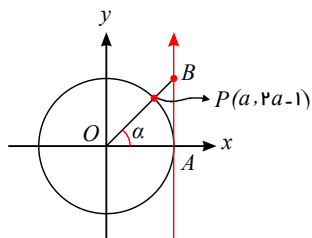
۵۰ شخصی با قد ۱٫۸۰ متر از روی پشت‌بام ساختمانی به ارتفاع ۷۵ متر بالگردی را که از روبه‌رو به آن شخص در حال نزدیک شدن است می‌بیند. اگر زاویه دید شخص نسبت به سطح افق ۳۰ درجه و فاصله بالگرد تا شخص در راستای زاویه دید شخص در حدود ۴۴۰٫۴ متر باشد، بالگرد در چند متری از سطح زمین قرار دارد؟

۲۲۲ (۴)

۲۹۷ (۳)

۲۹۵٫۲ (۲)

۲۹۶٫۸ (۱)



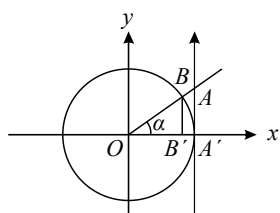
۵۱ با توجه به دایره مثلثاتی زیر، مساحت مثلث AOB چقدر است؟ ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ )

$\frac{3}{4}$  (۲)

$\frac{1}{2}$  (۴)

$\frac{2}{3}$  (۱)

$\frac{3}{8}$  (۳)



۵۲ با توجه به دایره مثلثاتی زیر، اگر  $AA' = \frac{\sqrt{3}}{3}$  باشد، مقدار  $OB'$  کدام است؟

$\frac{1}{2}$  (۲)

$\sqrt{3}$  (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۱)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)

۵۳ نقطه A روی محیط بیرونی چرخ کامیونی که با سرعت ثابت  $\frac{60}{h} \frac{km}{h}$  در حال حرکت است، قرار دارد. این نقطه پس از گذشت ۱ دقیقه n دور به‌علاوه  $\frac{2}{3}$  دور کامل را طی می‌کند. n کدام است؟ (شعاع چرخ ۱ متر است و  $\pi \simeq 3$ )

۱۶۶ (۴)

۱۹۰ (۳)

۱۳۳ (۲)

۱۶۷ (۱)

۵۴ اگر  $\frac{3\pi}{8} < \alpha \leq \frac{5\pi}{8}$  و  $\tan 2\alpha = \frac{-m+1}{2}$  باشد، حدود m کدام است؟

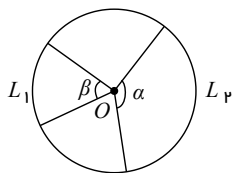
$[-1, 3]$  (۴)

$[-3, 1]$  (۳)

$(-1, 3]$  (۲)

$(-3, 1]$  (۱)

۵۵ اگر در شکل زیر حاصل ضرب طول کمان‌های  $L_1$  و  $L_2$  برابر  $\frac{\pi}{9}$  مساحت دایره باشد و  $\alpha = 4\beta$ ، آنگاه مثلثی با دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  از کدام نوع است؟ (O مرکز دایره است.)



قائم‌الزاویه (۲)

هیچ کدام (۴)

متساوی الساقین (۱)

قائم‌الزاویه و متساوی الساقین (۳)

۵۶ اگر  $\alpha = \beta - \gamma$ ،  $\beta = 60^\circ$  و  $\gamma = -3\pi$  رادیان باشند، آنگاه انتهای کمان زاویه  $\alpha$  در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

۵۷ در یک ساعت عقربه‌ای، نوک عقربه دقیقه‌شمار در مدت زمان ۴۰ دقیقه، مسافت ۶۰ سانتی‌متر را طی کرده است. طول عقربه دقیقه‌شمار چند سانتی‌متر است؟

$45\pi$  (۴)

$\frac{45}{\pi}$  (۳)

$15\pi$  (۲)

$\frac{15}{\pi}$  (۱)

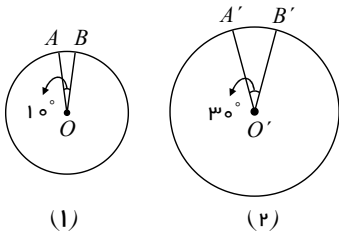
۵۸ انتهای کمان‌های ۳ و  $\frac{4}{5}$  رادیان به ترتیب در کدام نواحی قرار دارند؟

سوم - چهارم (۴)

سوم - سوم (۳)

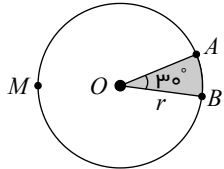
دوم - سوم (۲)

دوم - دوم (۱)



۵۹ مطابق شکل، اگر مساحت دایره (۲) سه برابر مساحت دایره (۱) باشد، حاصل  $\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}}$  کدام است؟

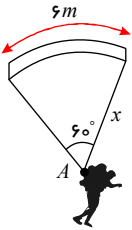
- (۱)  $\sqrt{3}$   
(۲)  $3\sqrt{3}$   
(۳) ۳  
(۴) ۴



۶۰ در شکل مقابل، محیط ناحیه هاشورخورده  $12 + \pi$  است. در این صورت طول کمان  $\widehat{AMB}$  کدام است؟

- (۱)  $9\pi$   
(۲)  $8\pi$   
(۳)  $6\pi$   
(۴)  $11\pi$

۶۱ مطابق شکل، یک چتر نجات به حالت دایره‌ای در هنگام پرواز به اندازه ۶۰ درجه باز شده است. مقدار  $x$  چند متر است؟ (نقطه A را مرکز دایره فرض کنید).



- (۱)  $\frac{\pi}{10}$   
(۲)  $18\pi$   
(۳)  $10\pi$   
(۴)  $\frac{18}{\pi}$

۶۲ در یک مثلث قائم‌الزاویه، اختلاف دو زاویه حاده برابر با  $18^\circ$  است. کوچک‌ترین زاویه مثلث چند رادیان است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{10}$   
(۲)  $\frac{\pi}{5}$   
(۳)  $\frac{3\pi}{10}$   
(۴)  $\frac{2\pi}{5}$

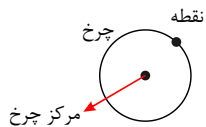
۶۳ طول کمان زاویه مرکزی  $\frac{\pi}{3}$  رادیان در دایره C با طول کمان زاویه مرکزی  $\frac{\pi}{12}$  رادیان در دایره C' برابر است. نسبت مساحت دایره C به مساحت دایره C' کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
(۲) ۴  
(۳)  $\frac{1}{16}$   
(۴) ۱۶

۶۴ در مدت ۴۸ دقیقه، عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار، در مجموع چند رادیان طی می‌کنند؟

- (۱)  $\frac{8\pi}{5}$   
(۲)  $\frac{9\pi}{5}$   
(۳)  $\frac{26\pi}{15}$   
(۴)  $\frac{28\pi}{15}$

۶۵ طول کمانی که یک نقطه روی یک چرخ دوار به شعاع  $\frac{1}{\pi}$  متر در هر ساعت طی می‌کند برابر با  $\frac{2}{5}$  متر است. اگر این نقطه نسبت به مرکز چرخ به اندازه ۹۰۰ درجه دوران کرده و سپس از کار بایستد، این چرخ جمعاً چند ساعت چرخیده است؟



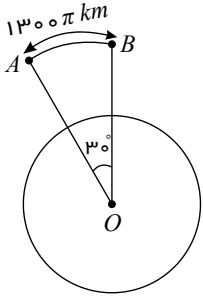
- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۵

۶۶ اگر اندازه یک زاویه برحسب رادیان ۳ برابر شود به اندازه آن زاویه برحسب درجه،  $60^\circ$  اضافه می‌شود. اندازه زاویه اولیه برحسب رادیان کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{12}$   
(۲)  $\frac{\pi}{6}$   
(۳)  $\frac{\pi}{4}$   
(۴)  $\frac{\pi}{3}$



۶۷) ماهواره ای در یک مدار دایره‌ای به دور زمین در حال حرکت است. اگر این ماهواره مسافتی معادل  $۱۳۰۰\pi$  کیلومتر را طی کند، با توجه به شکل، ماهواره در چه فاصله‌ای از سطح زمین برحسب کیلومتر در حال حرکت است؟ (شعاع زمین  $۶۴۰۰$  کیلومتر است.)



۲)  $\frac{۱۳۰۰\pi}{۳}$

۱) ۱۴۰۰

۴)  $\frac{۱۴۹\pi}{۳}$

۳) ۷۸۰۰

۶۸) در مدت زمانی معین، نوک عقربه دقیقه‌شمار یک ساعت عقربه‌ای با طول ۸ سانتی‌متر،  $۱۶\pi$  سانتی‌متر مسافت را طی می‌کند. در این مدت زمان، نوک عقربه ساعت‌شمار با طول ۶ سانتی‌متر، چه مسافتی را برحسب سانتی‌متر طی می‌کند؟

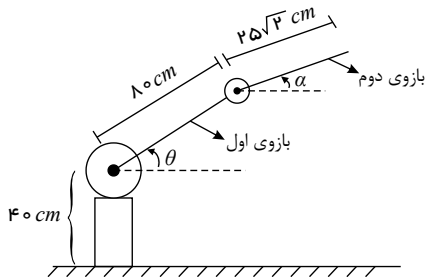
۴)  $۱۲\pi$

۳)  $۶\pi$

۲)  $۴\pi$

۱)  $\pi$

۶۹) شکل زیر یک ربات است که از دو بازوی متصل بهم برای برداشتن اجسام استفاده می‌کند. این ربات برای برداشتن یک شیء، بازوی دوم خود را در حالت زاویه  $\alpha = -۴۵^\circ$  نسبت به افق قرار داده است. اگر بازوی اول در وضعیت افقی قرار گیرد، ارتفاع جسم از سطح زمین برحسب سانتی‌متر کدام است؟



۱) ۲۰

۲) ۱۵

۳) ۳۵

۴) ۱۰

۷۰) کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۴)  $\sin(-۴) < \cos(-۲)$

۳)  $\sin ۳ < \cos(-۱)$

۲)  $\cos ۲ > \sin ۱$

۱)  $\sin ۴ > \cos(-۱)$

۷۱) چرخ و فلکی ۴۰ کابین دارد و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. اگر شخصی در ابتدا در کابین شماره ۵ باشد، پس از دوران به اندازه  $\frac{۴۳\pi}{۱۰}$  رادیان، نسبت به حالت اولیه در موقعیت کدام کابین قرار می‌گیرد؟ (فاصله بین کابین‌ها یکسان است و شماره‌بندی آن‌ها به ترتیب و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد.)

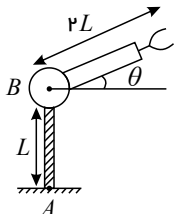
۴) ۱۲

۳) ۱۱

۲) ۱۰

۱) ۸

۷۲) در شکل زیر، بازوی حرکت روبات به گونه‌ای قرار گرفته است که فاصله نوک گیره تا سطح زمین، نصف حداکثر مقدار ممکن است. فاصله تصویر نوک گیره بر روی زمین تا نقطه A، چند برابر L است؟ ( $۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$ )



۲)  $\frac{\sqrt{۶}}{۴}$

۱)  $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$

۴)  $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۳)  $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$

۷۳) حاصل عبارت  $A = ۲[\sin ۸ - \sin ۹] + [\cos ۱۰]$  کدام است؟ [ ] نماد جزء صحیح است.

۴) -۳

۳) ۳

۲) -۱

۱) ۱

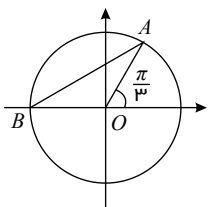
۷۴) اگر A نقطه متناظر با زاویه  $\frac{\pi}{۳}$  روی دایره مثلثاتی باشد، نسبت طول کمان AB به طول پاره خط AB کدام است؟

۲)  $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\pi$

۱)  $\frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi$

۴)  $\frac{\sqrt{۳}}{۹}\pi$

۳)  $\frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۹}$







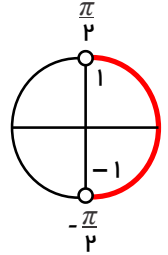
# پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

ناحیه‌ی سوم  $\Rightarrow$  سینوس و کسینوس هم علامتند  $\Rightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$   
 ناچیه‌ی دوم یا سوم  $\Rightarrow$  سینوس و تانژانت غیر هم علامتند  $\Rightarrow \sin \alpha \cdot \tan \alpha < 0$

$$\frac{-\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} < 3x < \frac{\pi}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵



واضح است در  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  سینوس بین ۱- و ۱ می‌باشد بنابراین:

$$-1 < \sin 3x < 1 \Rightarrow -1 < m-1 < 1 \Rightarrow 0 < m < 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

هرگاه مجموع یا تفاضل سینوس و کسینوس را داشتید و حاصل ضرب سینوس و کسینوس را خواستید دو طرف را به توان ۲ برسانید.

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{3}{4}$$

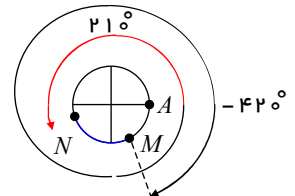
۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\frac{2 \sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha} = \frac{2 \sin^3 \alpha}{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} = \frac{2 \sin^3 \alpha}{\cos \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \tan \alpha$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

واضح است نقطه‌ی  $M$  از  $270^\circ$  درجه به اندازه‌ی  $30^\circ$  درجه بیشتر است و نقطه‌ی  $N$  از  $180^\circ$  درجه به اندازه‌ی  $30^\circ$  درجه بیشتر است پس کمان  $MN$  برابر  $90^\circ$  رادیان است.

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{L}{3} \rightarrow L = \frac{3\pi}{2} = \frac{3(3.14)}{2} = 4.71$$



اگر مرکز دایره  $O(x_0, y_0)$  بوده و بخواهیم نقطه‌ی  $A$  روی دایره را به اندازه‌ی  $\theta$  درجه در جهت عقربه‌های ساعت روی دایره به شعاع  $R$  دوران دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید به صورت  $(x_0 + R \cos \theta, y_0 - R \sin \theta)$  در می‌آید.

$$R = 3, O(0, 2) \rightarrow M = (0 + 3 \cos 120, 2 - 3 \sin 120) \rightarrow M = \left(-\frac{3}{2}, 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$|x| < \frac{\pi}{4} \rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \rightarrow -\frac{\pi}{4} < -x < \frac{\pi}{4} \rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$$

ابتدا حدود کمان تانژانت را بدست می‌آوریم.

یعنی کمان تانژانت در ناحیه‌ی اول قرار دارد و در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی تانژانت مثبت است یعنی:

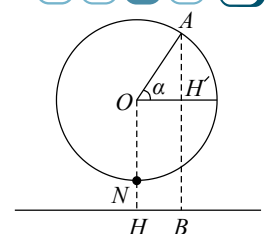
$$\frac{2-m}{m+1} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccccccc} m & -\infty & -1 & 2 & +\infty \\ \hline \text{عبارت} & & - & + & - \end{array} \rightarrow -1 < m < 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$OH = 60 - r = 60 - 25 = 35$$

$$\sin \alpha = \frac{AH'}{r} \Rightarrow AH' = 25 \sin \alpha$$

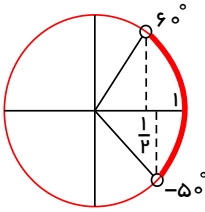
$$AB = AH' + H'B \stackrel{H'B=OH}{=} AH' + OH = 25 \sin \alpha + 35$$





۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$-25^\circ < x < 30^\circ \Rightarrow -50^\circ < 2x < 60^\circ$$

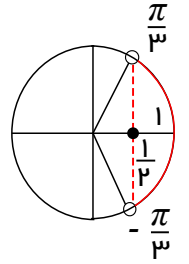


کمانی را که  $2x$  روی دایره ی مثلثاتی می پیماید مشخص می کنیم، با توجه به شکل داریم:

$$\frac{1}{2} < \cos 2x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 < 2m-1 \leq 2 \Rightarrow 2 < 2m \leq 3 \Rightarrow 1 < m \leq \frac{3}{2}$$

۱۰ با توجه به دایره ی مثلثاتی وقتی  $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ، کسینوس زاویه ی  $\alpha$  در فاصله ی  $[\frac{1}{2}, 1]$  قرار دارد، لذا:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \cos \alpha \leq 1 &\Rightarrow \frac{1}{2} < 2m+1 \leq 1 \\ \rightarrow -\frac{1}{2} < 2m \leq 0 &\Rightarrow -\frac{1}{4} < m \leq 0 \end{aligned}$$



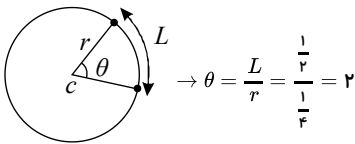
۱۱ اگر یک زاویه ی مرکزی  $\theta$  در دایره های به شعاع  $r$ ، کمانی به طول  $L$  ایجاد کند در این صورت اندازه ی زاویه ی  $\theta$  برحسب رادیان برابر  $\frac{L}{r}$  است.

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{\frac{1}{2}r}{r} = \frac{1}{2}$$

اگر اندازه ی یک زاویه را برحسب درجه با  $D$  و برحسب رادیان با  $R$  نشان دهیم داریم:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{2\pi} \rightarrow D = \left(\frac{90}{\pi}\right)^\circ$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴



۱۳ بعد از دوران  $21^\circ$  کابین  $A$  در موقعیت شکل زیر قرار می گیرد. با توجه به شکل:

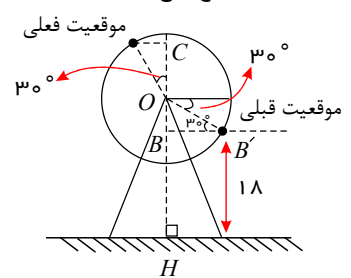
$$A \text{ ارتفاع فعلی کابین} = OC + OB + BH$$

حال با توجه به شعاع چرخ و فلک طول  $OC$  و  $OB$  را می یابیم:

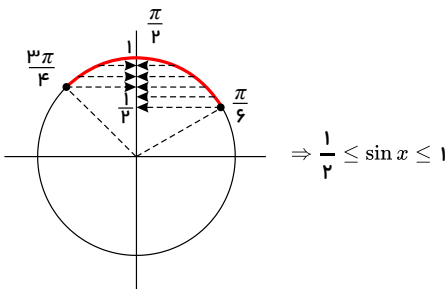
$$\cos 30^\circ = \frac{OC}{R} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OC}{12} \rightarrow OC = 6\sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{OB}{R} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OB}{12} \rightarrow OB = 6$$

$$\Rightarrow A \text{ ارتفاع فعلی کابین} = 6\sqrt{3} + 6 + 18 = 24 + 6\sqrt{3} = 6(4 + \sqrt{3})$$



۱۴ در دایره ی مثلثاتی وقتی  $x$  از  $\frac{\pi}{6}$  تا  $\frac{3\pi}{4}$  تغییر می کند، از  $\frac{\pi}{4}$  نیز عبور می کند. پس سینوس آن یک را نیز می پذیرد. لذا:



$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$$



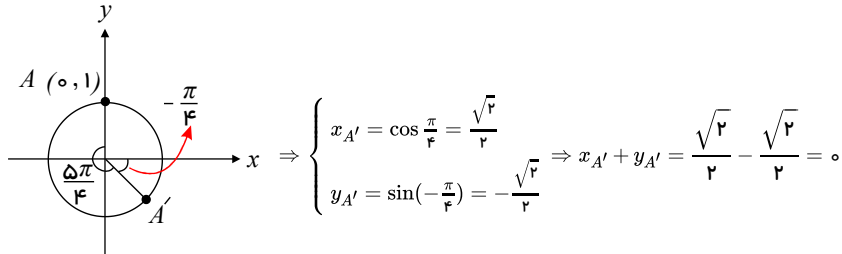
۱۵ اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، علامت زاویه مثبت است، پس زاویه دوران برابر است با:

$$\frac{13\pi}{4} = 2\pi + \frac{5\pi}{4}$$

با دوران به اندازه  $2\pi$ ، نقطه  $A$  به موقعیت اولیه خود باز می‌گردد، پس کافیت نقطه  $A$  را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه  $\frac{5\pi}{4}$  دوران دهم تا نقطه‌ی

$A'$  به دست آید.

مطابق شکل داریم:



۱۶ در ناحیه سوم دایره‌ی مثلثاتی  $\sin x < 0$  و  $\tan x > 0$  است.

$$\cot a - \tan a = 2 \cot 2a, \cot a + \tan a = \frac{2}{\sin 2a} \quad \text{می‌دانیم:}$$

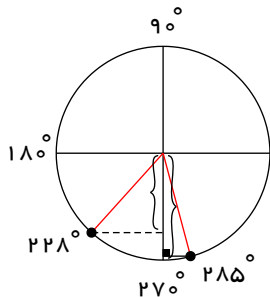
$$\frac{1}{\tan^2 15^\circ} - \frac{1}{\cot^2 15^\circ} = \cot^2 15^\circ - \tan^2 15^\circ = (\cot 15^\circ + \tan 15^\circ)(\cot 15^\circ - \tan 15^\circ)$$

$$= \left(\frac{2}{\sin 30^\circ}\right) (2 \cot 30^\circ) = \left(\frac{2}{1}\right) (2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

۱۸

هر رادیان حدوداً  $57^\circ$  است، بنابراین باید  $\sin 57^\circ$  و  $\sin 228^\circ$  و  $\sin 285^\circ$  را مقایسه کنیم.  $57^\circ$  در ناحیه اول است و در این ناحیه سینوس مثبت است و  $228^\circ$  در ناحیه سوم و  $285^\circ$  در ناحیه چهارم می‌باشند که در این نواحی سینوس منفی است. بنابراین  $\sin 57^\circ$  از دو مقدار دیگر بیشتر است. از روی شکل واضح است که  $\sin 285^\circ$  منفی‌تر (یعنی کوچکتر از)  $\sin 228^\circ$  می‌باشد.

پس:  $\sin 1^R < \sin 4^R < \sin 5^R$  یعنی  $C < B < A$  است.



۱۹ اگر  $\theta$  بر حسب رادیان و  $r$  شعاع دایره و  $L$  اندازه‌ی کمان روبه‌رو به زاویه‌ی  $\theta$  باشد داریم:

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{10} \text{ رادیان}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\pi}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{10} \rightarrow D = 18^\circ$$

۲۰ اول باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

(\*) انتهای کمان  $x$  در ناحیه اول یا چهارم است.  $\Rightarrow \cos x \geq 0$

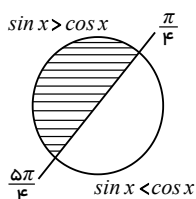
از طرفی:

$$\cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x \Rightarrow \sqrt{\cos x} = \sin x - \cos x$$

چون طرف چپ نامنفی است، پس باید طرف راست هم نامنفی باشد، در نتیجه:

$$\sin x - \cos x \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq \cos x$$

با توجه به نکته‌ی مقابل و حالت (\*) داریم:



$\Rightarrow$  انتهای کمان  $x$  در ناحیه اول است.

۲۱ در ناحیه دوم دایره‌ی مثلثاتی مقادیر سینوس، مثبت و مقادیر کتانژانت منفی است.



$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

$$\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\sin x + 6 \cos x} = 1 \xrightarrow{\div \cos x} \frac{3 \tan x - 4}{\tan x + 6} = 1 \rightarrow 3 \tan x - 4 = \tan x + 6$$

$$\rightarrow 2 \tan x = 10 \rightarrow \tan x = 5$$

$$\text{پس } \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{10}{1 - 25} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12} \rightarrow \cot 2x = -\frac{12}{5}$$

چون زاویه مشخص شده در هر دو مثلث برابر  $\alpha$  است، بنابراین تانژانت هر دو زاویه برابر است. در نتیجه داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{3y}{6x} \\ \tan \alpha = \frac{2x}{4-y} \end{cases} \rightarrow \frac{3y}{6x} = \frac{2x}{4-y} \rightarrow 12xy = 4y^2 \rightarrow 3x^2 = y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 3x^2 = 4x^2 = 4x^2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

$$\triangle ABC: \tan 30^\circ = \frac{y}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = 8$$

$$\triangle ABD: \tan 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{8+x}{8\sqrt{3}} = \sqrt{3} \rightarrow 8+x = 24 \rightarrow x = 16$$

با توجه به شکل صورت سؤال داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$\tan \hat{A} = \frac{2}{x} = \frac{6}{x+4} \rightarrow 2(x+4) = 6x \rightarrow 2x+8 = 6x$$

$$\rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2 \rightarrow \tan \hat{A} = \frac{2}{2} = 1$$

با توجه به شکل صورت سؤال داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{AB}{AC} \\ \cot \beta &= \frac{AC}{DC} \end{aligned} \right\} \rightarrow \cos \alpha \cdot \cot \beta = \frac{AB}{AC} \times \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{DC} = 2$$

با توجه به شکل صورت سؤال داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \alpha = 30^\circ \xrightarrow{\alpha + \theta = 90^\circ} \theta = 60^\circ$$

$\hat{B} = 60^\circ$  زاویه خارجی مثلث  $ABD$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$\hat{A} + \hat{D}_1 = \hat{B} \rightarrow \hat{D}_1 = 30^\circ \rightarrow AB = BD = 6$$

$$\hat{B} = 60^\circ \rightarrow \sin \hat{B} = \frac{x}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{BD\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\rightarrow x^2 - x\sqrt{3} = (3\sqrt{3})^2 - 3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 27 - 9 = 18$$

$$\alpha + 2\alpha = 3\alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha = 30^\circ$$

چون مثلث قائم‌الزاویه است پس داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

از بررسی روابط داده شده؛ داریم:

$$\text{الف) } \alpha = 30^\circ \rightarrow \sin 2\alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ب) } \cos 2\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$2 \cos \alpha - 1 = 2 \cos 30^\circ - 1 = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$$

پس (الف) درست است.

پس (ب) نادرست است.



$$\left. \begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha &= \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos 2\alpha = \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

بنابراین (ج) درست است.

$$\text{د) } \tan 2\alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)}{1 - \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{2 \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{3}$$

پس (د) درست است.

در نهایت ۳ گزاره درست است.

چون  $\hat{A} = 30^\circ$  است، بنابراین  $DE$  نصف وتر یعنی  $AE$  است، بنابراین: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

$$AE = 2DE = 8 \quad (1)$$

با توجه به شکل  $\hat{A}_1 = 60^\circ$  و  $\hat{B}_1 = 30^\circ$  می‌باشند. بنابراین:

$$\hat{B}_1 = 30^\circ \rightarrow AF = \frac{AB}{2} \rightarrow AF = 6 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} EF = 8 - 6 = 2 \rightarrow y = 2$$

از طرفی:

$$\sin A_1 = \sin 60^\circ = \frac{BF}{12} = \frac{x}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = 6\sqrt{3} \rightarrow xy = 6\sqrt{3} \times 2 = 12\sqrt{3}$$

با توجه به شکل داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

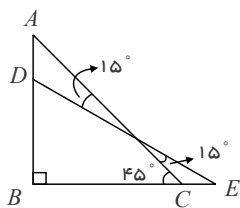
$$\hat{A} = 30^\circ \rightarrow ED = \frac{AE}{2} = 3 \quad (1)$$

از طرفی:

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{AE} = \frac{AD}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow AD = 3\sqrt{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{DC}{AD} = \frac{DC}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9} \rightarrow DC = \frac{3\sqrt{3} \times 5\sqrt{3}}{9} = 5 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} EC = ED + DC = 3 + 5 = 8$$



با توجه به شکل زاویه  $\hat{E}$  برابر  $30^\circ$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

بنابراین:

$$\sin \hat{E} = \sin 30^\circ = \frac{DB}{DE} = \frac{DB}{10} = \frac{1}{2} \rightarrow DB = 5$$

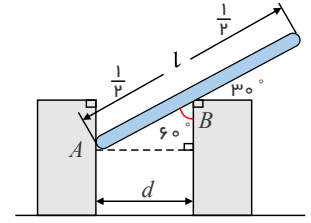
$$\sin \hat{C} = \sin 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow AB = 5\sqrt{2} \approx 5 \times 1.4 \approx 7$$

$$\text{بنابراین: } AD = AB - DB = 7 - 5 = 2$$

با توجه به شکل، میله با دیوار  $B$  زاویه  $60^\circ$  تشکیل می‌دهد. بنابراین  $d$  برابر ضلع مقابل به زاویه  $60^\circ$  در مثلث قائم‌الزاویه شکل زیر است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳



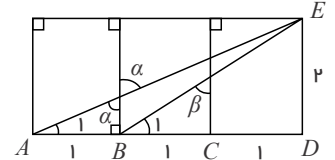
$$\sin 60^\circ = \frac{d}{\frac{1}{2}} \rightarrow d = \frac{1}{2} \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



۳۴ اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  باشد، آن گاه  $\cot \alpha = \tan \beta$  و  $\tan \alpha = \cot \beta$  است. (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\begin{cases} \hat{\alpha} + \hat{A}_1 = 90^\circ \rightarrow \cot \alpha = \tan \hat{A}_1 \rightarrow \tan \hat{A}_1 = \frac{DE}{AD} = \frac{2}{3} \\ \hat{\beta} + \hat{B}_1 = 90^\circ \rightarrow \cot \beta = \tan \hat{B}_1 \rightarrow \tan \hat{B}_1 = \frac{DE}{BD} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \cot \hat{\alpha} + \cot \hat{\beta} = \tan \hat{A}_1 + \tan \hat{B}_1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$



۳۵ با توجه به شکل  $\hat{C} + \hat{B} = 90^\circ$  بنابراین داریم: (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\cos \hat{C} = \sin \hat{B} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{4}{AB} \quad (1)$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{(1)} \sin \hat{B} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0.4 \times \sqrt{5}$$

طبق قضیه فیثاغورث طول AB برابر است با:

$$\left. \begin{array}{l} AH = AD + DH \\ OE = DH \end{array} \right\} \rightarrow AH = AD + OE$$

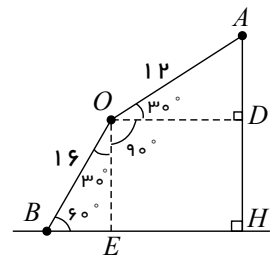
۳۶ با توجه به شکل داریم: (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\text{از طرفی } OE = OB \times \sin 60^\circ = OB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16 \times \frac{1.75}{2} = 8 \times \frac{3.5}{2}$$

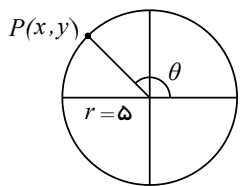
$$= 4 \times 3.5 = 14$$

$$AD = OA \cdot \sin 30^\circ = \frac{OA}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\text{پس: } AH = 14 + 6 = 20$$



۳۷ (۱) (۲) (۳) (۴)



می‌دانیم در دایره مثلثاتی با شعاع غیر از یک،  $(r \neq 1)$  سینوس یک زاویه برابر است با:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4}$$

از طرفی داریم:

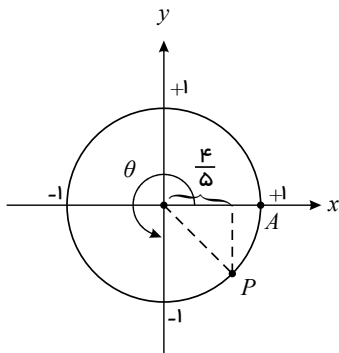
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow x^2 = r^2 - y^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 25 \left(1 - \frac{1}{16}\right)$$

$$= 25 \times \frac{15}{16} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{25 \times 15}{16}} = \pm \frac{5}{4} \sqrt{15} \xrightarrow[\text{ربع دوم}]{x < 0} x = -\frac{5}{4} \sqrt{15}$$

۳۸ نقطه P، زاویه theta و نقطه A را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم، چون  $x_P = \frac{4}{5} > 0$  است یعنی نقطه P در ربع چهارم است. (۱) (۲) (۳) (۴)

چون  $r = 1 = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$  داریم:



$$1 = x_P^2 + y_P^2 \rightarrow y_P^2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\rightarrow y_P = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow[\text{چهارم}]{\text{در ربع } P} y = -\frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \cot \theta = \frac{x_P}{y_P} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

در ربع چهارم علامت نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر است: **۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹**

$$\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0, \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$$

پس گزینه ۲ درست است.  $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \rightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$ .  
بررسی سایر گزینه‌ها

گزینه ۱: چون همواره  $\tan \alpha$  و  $\cot \alpha$  هم علامت‌اند،  $\frac{\tan \alpha}{\cot \alpha} > 0$  است. یعنی گزینه ۱ نادرست است.

گزینه ۳: نادرست است زیرا:

$$\cos \alpha \cdot \tan \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha$$

و چون در ربع چهارم  $\sin \alpha$  منفی است پس این گزینه نادرست است.

$$\sin \alpha \cdot \cot \alpha = \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cos \alpha \quad \text{گزینه ۴:}$$

چون در ربع چهارم  $\cos \alpha$  مثبت است، پس این گزینه نیز نادرست است.

**۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰** چون  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$  است، پس  $\sin \alpha$  و  $\cos \alpha$  مختلف‌العلامت‌اند. بنابراین  $\alpha$  یا در ناحیه دوم است یا در ناحیه چهارم.

از طرفی چون  $\cos \alpha \cdot \cot \alpha > 0$  است، داریم:

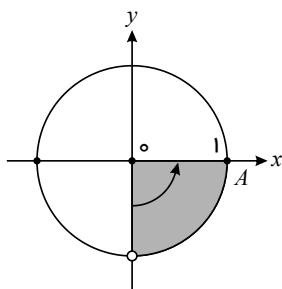
$$\cos \alpha \cdot \cot \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} > 0 \rightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} > 0 \xrightarrow{\cos^2 \alpha > 0} \sin \alpha > 0$$

چون  $\sin \alpha$  مثبت است،  $\alpha$  در یکی از نواحی ۱ یا ۲ قرار دارد.

چون هر دو نامساوی هم‌زمان برقرار است بین نتایج بالا اشتراک می‌گیریم. بنابراین  $\alpha$  در ربع دوم قرار دارد.

**۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱**

ناحیه رنگ‌شده،  $2\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$  را مشخص می‌کند، در این ناحیه  $1 < \cos \theta < 0$  است.



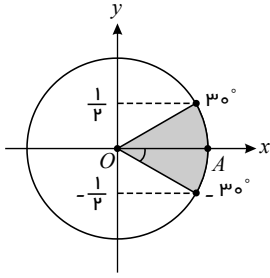
بنابراین داریم:

$$0 < 2m + 1 \leq 1 \rightarrow -1 < 2m \leq 0 \rightarrow -\frac{1}{2} < m \leq 0 \xrightarrow{\text{عدد صحیح}} m = 0$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲

در محدوده رنگ شده،  $-\frac{1}{2} < \sin \alpha < \frac{1}{2}$  خواهد بود.



پس:  $-\frac{1}{2} < m + \frac{3}{2} < \frac{1}{2} \rightarrow -2 < m < -1$

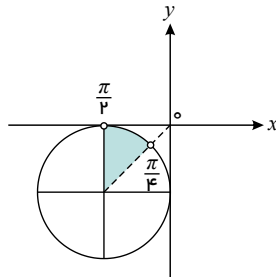
۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳

در ربع دوم با افزایش زاویه، مقدار سینوس و کسینوس کاهش می‌یابد.

$$90^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ \rightarrow \begin{cases} \sin \beta < \sin \alpha \\ \cos \beta < \cos \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha - \sin \beta > 0 \\ \cos \beta - \cos \alpha < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴

اگر  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  باشد، داریم:



گزینه ۳ غلط است  $\rightarrow \sin \alpha > \cos \alpha$   
گزینه ۲ غلط است  $\rightarrow \tan \alpha > \cot \alpha$   
گزینه ۴ غلط است  $\rightarrow \tan \alpha > \sin \alpha$

گزینه ۱ صحیح است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵ بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۲: در ربع اول اگر  $x > y$  باشد،  $\cos x < \cos y$  است.

گزینه ۳: در ربع اول با افزایش زاویه، تانژانت زاویه نیز افزایش می‌یابد، یعنی داریم:  $\tan x > \tan y$

گزینه ۴: در ربع اول با افزایش زاویه، کتانژانت زاویه کاهش می‌یابد، یعنی داریم:  $\cot x < \cot y$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶

بیش‌ترین مقدار سینوس و کسینوس برابر ۱ است. وقتی جمع یک سینوس و کسینوس برابر ۲ شده باشد، یعنی هر دو مقدار برابر ۱ است. یعنی داریم:

$$\begin{cases} \sin(\frac{\hat{B}}{2} + \hat{C}) = 1 \rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \\ \cos(\hat{A} - \hat{B}) = 1 \rightarrow \hat{A} - \hat{B} = 0 \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \end{cases}$$

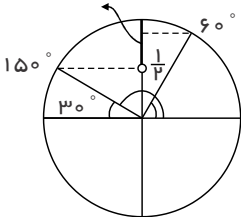
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{B} + \hat{B} + 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} = 180^\circ$$

$$\rightarrow 3\frac{\hat{B}}{2} = 90^\circ \rightarrow \hat{B} = 60^\circ \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$

یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۷ با توجه به دایره مثلثاتی داریم:

محدوده  $\sin 3\theta$



$$20^\circ < \theta < 50^\circ \Rightarrow 60^\circ < 3\theta < 150^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin 3\theta \leq 1$$

$$\frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 < m-1 \leq 2 \Rightarrow 2 < m \leq 3 \Rightarrow m \in (2, 3]$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{5}{r} \rightarrow r = \frac{30}{\pi}$$

$$\Rightarrow S = \pi r^2 = \pi \times \frac{900}{\pi^2} = \frac{900}{\pi}$$





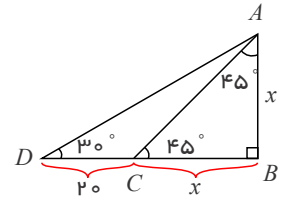
۱ ۲ ۳ ۴ ۴۹

$$\triangle ABC : \hat{ACB} = \hat{CAB} = 45^\circ \Rightarrow AB = BC = x$$

$$\triangle ADB : \tan 30^\circ = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{20+x}$$

$$\Rightarrow 3x = 20\sqrt{3} + \sqrt{3}x \Rightarrow (3 - \sqrt{3})x = 20\sqrt{3}$$

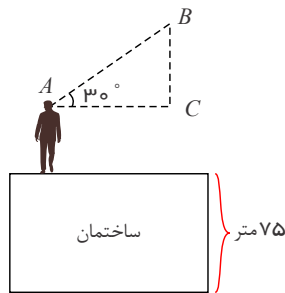
$$\Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3} + 60}{9 - 3} \Rightarrow x = \frac{60(\sqrt{3} + 1)}{6} = 10(\sqrt{3} + 1)$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۵۰

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{440.4} \Rightarrow BC = 220.2$$

$$\Rightarrow \text{فاصله بالگرد تا سطح زمین} = 220.2 + 1.8 + 75 = 297 \text{ (متر)}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۵۱ طول ضلع AB برابر  $\tan \alpha$  می باشد، پس مساحت مثلث AOB برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times OA \xrightarrow{OA=1} S = \frac{1}{2} \times \tan \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow (2a - 1)^2 + a^2 = 1 \Rightarrow 5a^2 - 4a + 1 = 1 \Rightarrow a(5a - 4) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق} \\ a = \frac{4}{5} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

پس  $\cos \alpha$  برابر  $\frac{4}{5}$  می باشد و  $\sin \alpha$  برابر  $\frac{3}{5}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۲

$$\tan \alpha = AA' \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{0 < \alpha < 90^\circ} \alpha = 30^\circ$$

$$OB' = \cos \alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۳ ابتدا باید ببینیم در یک دقیقه، کامیون چه مسافتی را طی می کند.

$$60 \frac{km}{h} \times \frac{1h}{60 \text{ min}} \times \frac{1000m}{1km} = 1000 \frac{m}{min}$$

کامیون در یک دقیقه، ۱۰۰۰ متر حرکت می کند، پس داریم:

$$\text{محیط چرخ} = 2\pi r = 2 \times 3 \times 1 = 6 \Rightarrow 6n + \frac{2}{3} \times 6 = 1000 \Rightarrow 6n = 1000 - 4 = 996 \Rightarrow n = 166$$

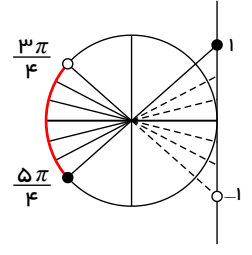
۱ ۲ ۳ ۴ ۵۴

$$\frac{3\pi}{8} < \alpha \leq \frac{5\pi}{8} \xrightarrow{\times 2} \frac{3\pi}{4} < 2\alpha \leq \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{2\alpha=x} \frac{3\pi}{4} < x \leq \frac{5\pi}{4}$$

باتوجه به دایره مثلثاتی مشخص می شود که  $-1 < \tan x \leq 1$ ، داریم:



$$-1 < \frac{-m+1}{2} \leq 1 \rightarrow -2 < -m+1 \leq 2 \rightarrow -3 < -m \leq 1 \rightarrow -1 \leq m < 3 \rightarrow m \in [-1, 3)$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۵۵

$$\begin{cases} L_1 = R\beta \\ L_r = R\alpha \\ \alpha = 4\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_1 = R\beta \\ L_r = 4R\beta \end{cases}$$

$$L_1 \times L_r = \frac{\pi}{9} \times \pi R^2 \rightarrow R\beta \times 4R\beta = \frac{\pi^2 R^2}{9} \rightarrow 4\beta^2 = \frac{\pi^2}{9}$$

$$\rightarrow 2\beta = \frac{\pi}{3} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{6} \rightarrow \beta = 30^\circ \text{ و } \alpha = 4\beta \xrightarrow{\beta=30^\circ} \alpha = 120^\circ$$

مثلث متساوی الساقین  $\gamma \rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \rightarrow \gamma = 30^\circ \rightarrow \gamma = \beta$

پس مثلث متساوی الساقین است و زاویه قائمه ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 600^\circ \\ \gamma &= -3\pi = -3 \times 180^\circ = -540^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha = \beta - \gamma \rightarrow \alpha = 600^\circ - (-540^\circ) = 1140^\circ$$

$$\alpha = (3 \times 360^\circ) + 60^\circ = 60^\circ$$

بنابراین  $\alpha$  در ربع اول قرار دارد.

یک دور کامل در دایره، ۶ دقیقه است. بنابراین عقربه دقیقه شمار  $\frac{2}{3}$  دایره را طی کرده است. دایره کامل  $2\pi$  رادیان است. بنابراین داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۷

$$\text{زاویه دوران عقربه برحسب رادیان} = \frac{2}{3} \times 2\pi = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\Rightarrow r = \frac{l \text{ (طول کمان)}}{\theta \text{ (برحسب رادیان)}} = \frac{\text{شعاع دایره یا همان طول عقربه دقیقه شمار}}{\theta}$$

$$= \frac{60}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{45}{\pi} \text{ (سانتی متر)}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۸

$$\rightarrow \begin{cases} \text{ناحیه دوم} \quad 3 \times 57.3^\circ \approx 171.9^\circ \\ \text{ناحیه سوم} \quad 4.5 \times 57.3^\circ \approx 257.85^\circ \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹

مساحت و شعاع دایره (۲) را به ترتیب با  $S'$  و  $R'$  و مساحت و شعاع دایره (۱) را به ترتیب با  $S$  و  $R$  نمایش می دهیم، داریم:

$$\text{فرض سؤال} \quad \frac{S'}{S} = 3 \rightarrow \frac{\pi R'^2}{\pi R^2} = 3 \rightarrow \frac{R'}{R} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}} = \frac{R'(\frac{\pi}{6})}{R(\frac{\pi}{18})} = \frac{R'}{R} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۰

$$\widehat{AB} \text{ طول کمان } AB = r\alpha = r \times \frac{\pi}{6} = \frac{r\pi}{6}$$

$$2r + \frac{r\pi}{6} = 12 + \pi \rightarrow r(2 + \frac{\pi}{6}) = 6(2 + \frac{\pi}{6}) \rightarrow r = 6$$

$$\rightarrow \widehat{AMB} = r \times (2\pi - \frac{\pi}{6}) = 6 \times \frac{11\pi}{6} \rightarrow \widehat{AMB} = 11\pi$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۱

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{18}{\pi}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۶۲

$$\begin{cases} x - y = 18^\circ \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow 2x = 108^\circ \Rightarrow x = 54^\circ, y = 90^\circ - 54^\circ \Rightarrow y = 36^\circ$$

$$\frac{36}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۳

$$C' \text{ طول کمان در دایره } C' = C' \Rightarrow \ell = \ell' \Rightarrow r_C \cdot \alpha = r_{C'} \cdot \alpha'$$

$$\Rightarrow r_C \times \frac{\pi}{3} = r_{C'} \times \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{1}{3}r_C = \frac{1}{12}r_{C'} \Rightarrow r_{C'} = 4r_C$$

$$\frac{S_C}{S_{C'}} = \frac{\pi r_C^2}{\pi r_{C'}^2} = \left(\frac{r_C}{r_{C'}}\right)^2 = \left(\frac{r_C}{4r_C}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۴ در هر ۶۰ دقیقه، عقربه ساعت‌شمار  $\frac{\pi}{6}$  رادیان و عقربه دقیقه‌شمار  $2\pi$  رادیان می‌چرخد، پس داریم:

$$\text{عقربه ساعت‌شمار} \Rightarrow \frac{60}{48} = \frac{\frac{\pi}{6}}{x} \Rightarrow x = \frac{48 \times \frac{\pi}{6}}{60} = \frac{8\pi}{60} = \frac{2\pi}{15}$$

$$\text{عقربه دقیقه‌شمار} \Rightarrow \frac{60}{48} = \frac{2\pi}{y} \Rightarrow y = \frac{48 \times 2\pi}{60} = \frac{8\pi}{5}$$

$$x + y = \frac{2\pi}{15} + \frac{8\pi}{5} = \frac{2\pi + 24\pi}{15} = \frac{26\pi}{15}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۵

$$D = 90^\circ \Rightarrow \frac{90^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = 5\pi \Rightarrow \text{طول کمان طی شده } \ell = r \cdot \theta = 5\pi \times \frac{1}{\pi} = 5$$

چون هر یک ساعت ۲٫۵ متر می‌چرخد، پس در مدت ۲ ساعت ۵ متر می‌چرخد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۶ اگر اندازه زاویه برحسب رادیان را با  $R$  و برحسب درجه را با  $D$  نشان دهیم، داریم:

$$R_\pi = 3R_1, \quad D_\pi = 60 + D_1, \quad \frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow D = \frac{180R}{\pi}$$

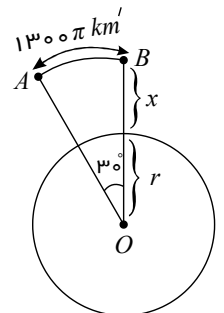
$$D_\pi = 60 + D_1 \Rightarrow \frac{180R_\pi}{\pi} = 60 + \frac{180R_1}{\pi} \Rightarrow 180R_\pi = 60\pi + 180R_1$$

$$3R_\pi = \pi + 3R_1 \Rightarrow 3 \times 3R_1 = \pi + 3R_1 \Rightarrow 6R_1 = \pi \Rightarrow R_1 = \frac{\pi}{6}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۷ می‌دانیم  $30^\circ$  معادل  $\frac{\pi}{6}$  رادیان است، پس داریم:

$$\widehat{AB} \text{ طول کمان } \ell = (x + r) \cdot \frac{\pi}{6} = 1300\pi \Rightarrow x + r = 6 \times 1300$$

$$\Rightarrow x + 6400 = 7800 \Rightarrow x = 1400 \text{ km}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۶۸

$$\text{عقربه دقیقه‌شمار} \Rightarrow r_1 = 8 \text{ cm}, \ell_1 = 16\pi \Rightarrow \text{زاویه طی شده} = \frac{\ell_1}{r_1} = \frac{16\pi}{8} = 2\pi$$

یعنی عقربه دقیقه‌شمار یک دور کامل را طی کرده است و از لحاظ زمانی یعنی یک ساعت گذشته است و می‌دانیم در یک ساعت، عقربه ساعت‌شمار  $\frac{\pi}{6}$  رادیان را طی می‌کند، پس داریم:

$$\text{عقربه ساعت‌شمار} : r_\pi = 6 \text{ cm}, \theta_\pi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \ell_\pi = r_\pi \theta_\pi = 6 \times \frac{\pi}{6} = \pi \text{ cm}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۹ با توجه به شکل زیر داریم:

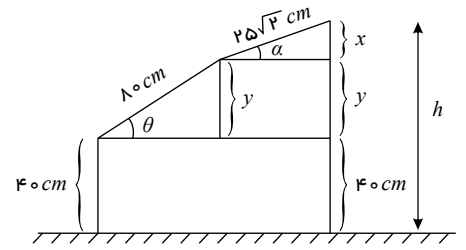


$$\sin \alpha = \frac{x}{25\sqrt{2}} \Rightarrow x = 25\sqrt{2} \sin \alpha, \quad \sin \theta = \frac{y}{80} \Rightarrow y = 80 \sin \theta$$

$$h = 40 + x + y = 40 + 25\sqrt{2} \sin \alpha + 80 \sin \theta$$

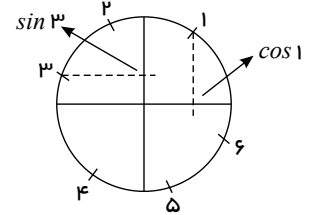
$$\Rightarrow h = 40 + 25\sqrt{2} \sin(-45^\circ) + 80 \sin(0) = 40 - 25\sqrt{2} \sin 45^\circ + 0$$

$$\Rightarrow h = 40 - 25\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 40 - 25 = 15$$



ابتدا توجه کنید که  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$  ,  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  و زوایای داده شده در گزینه‌ها برحسب رادیان هستند. (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۰)

$$1 \text{ rad} \approx 57^\circ \Rightarrow \begin{cases} 2 \text{ rad} \approx 114^\circ \\ 3 \text{ rad} \approx 171^\circ \\ 4 \text{ rad} \approx 228^\circ \end{cases}$$



گزینه ۱، نادرست است، زیرا:  $\sin 4 < 0 < \cos(-1)$

گزینه ۲، نادرست است، زیرا:  $\cos 2 < 0 < \sin 1$

گزینه ۴، نادرست است، زیرا:  $\cos(-2) < 0 < \sin(-4)$

گزینه ۳، با توجه به دایره مثلثاتی (شکل بالا) درست است.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۷۱)

$$\text{رادیان زاویه مرکزی بین دو کابین متوالی} = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$$

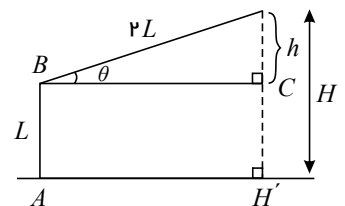
$$\frac{43\pi}{10} = \frac{86\pi}{20} = \frac{80\pi}{20} + \frac{6\pi}{20} = 4\pi + 6\left(\frac{\pi}{20}\right)$$

$$20 = 40 + 6 = 11 \text{ موقعیت جدید}$$

یعنی ۲ دور کامل حرکت کرده و سپس ۶ کابین جلو رفته است، پس:

ابتدا ارتفاع نوک گیره این روبات تا سطح زمین را به صورت تابعی از  $\theta$  می‌نویسیم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۲)

$$h = 2L \sin \theta \Rightarrow H = L + 2L \sin \theta$$



می‌دانیم بیش‌ترین مقدار ممکن زمانی رخ می‌دهد که  $\sin \theta = 1$  باشد که در این صورت:  $H = 3L$

پس طبق فرض، روبات در حالتی قرار دارد که:

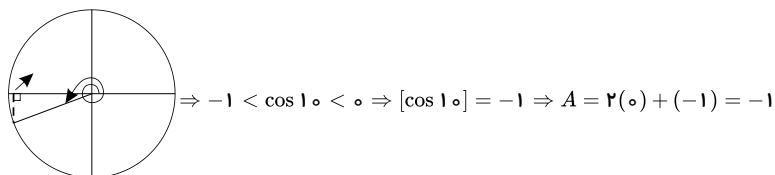
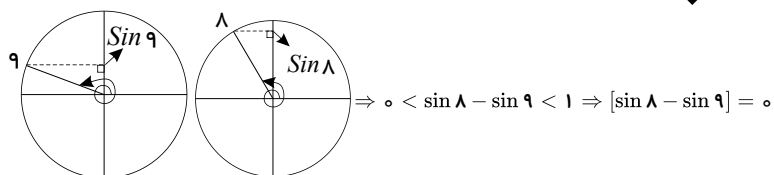
$$H = \frac{3L}{2} \Rightarrow L + 2L \sin \theta = \frac{3L}{2} \Rightarrow 2L \sin \theta = \frac{L}{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$AH' = BC = 2L \cos \theta = 2L \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2} L$$

در نتیجه:

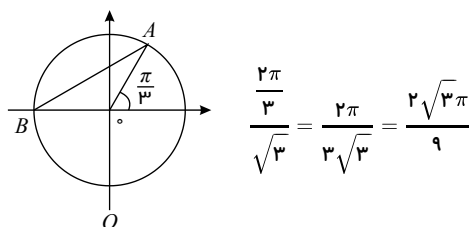
زاویه‌های داده شده برحسب رادیان هستند و هر رادیان تقریباً برابر با ۵۷ درجه است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۳)



مختصات نقطه  $A = (\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  است و  $B(-1, 0)$  می شود. پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۴

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

طول کمان  $AB$  هم برابر زاویه  $\hat{AOB}$  است و  $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$  می شود. پس:



## پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴

۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴

۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴

۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴